

Hierarchische Basen II

Stefan Dirnstorfer

Tensor Basen

Ziel: Übertragung einer hierarchischen Basis $\{\phi_{ij}\}$ ins Mehrdimensionale.

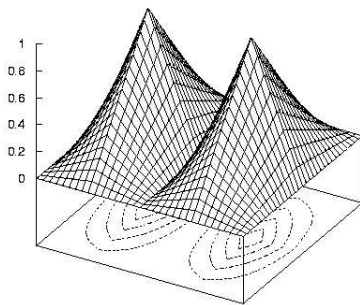
Multiindex $\underline{l} = (l_1, \dots, l_d) \in N^d$

$$\Phi_{\underline{l}, \underline{i}} = \prod_{j=1}^d \phi_{l_j, i_j}$$

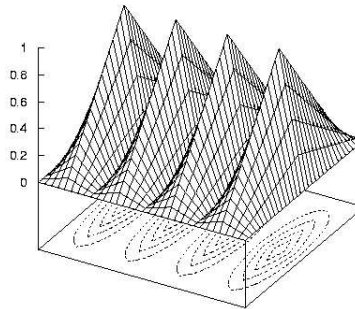
$$V_l = \text{span} \left\{ \Phi_{\underline{l}, \underline{i}}; i_j = 1, \dots, 2^{l_j}; j = 1, \dots, d \right\}$$

$$W_l = V_l - \bigoplus_{j=1}^d V_{l - e_j}$$

Basisfunktionen von $W_{(2,1)}$



Basisfunktionen von $W_{(3,1)}$



Funktionsinterpolation

Jede Funktion läßt sich als unendlich Summe schreiben:

$$u = \sum_{l \in N^d} u_l \text{ mit } u_l \in W_l$$

Mit endlich vielen Summanden kann man jede stetige Funktion beliebig genau interpolieren:

$$u^L = \sum_{l \in L} u_l \text{ mit } L \subset N^d, |L| < \infty$$

Volles Gitter

Das volle Gitter ist definiert als:

$$V_n^{(\infty)} = \bigoplus_{|l|_\infty < n} W_l$$

Das entspricht einem Gitter mit äquidistanten Stützpunkten auf dem Gebiet $[0, 1]^d$

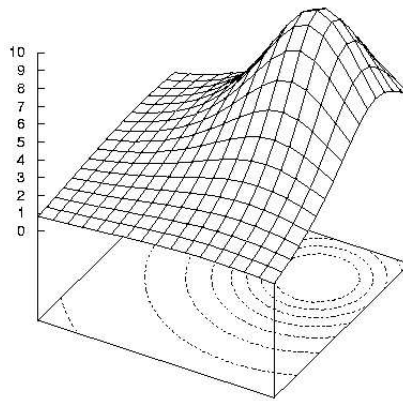
$$h = 2^{-n}$$

$$|V_n^{(\infty)}| = (2^n + 1)^d$$

Interpolation auf vollem Gitter

$$f = \frac{1}{(x-0.75)^2 + (y-0.75)^2 + 0.1}$$

n	Nodes	Fehler
0	4	6.96
1	9	5.56
2	25	1.10
3	81	0.56
4	298	0.18
5	1089	0.047
6	4225	0.012



Eigenschaften des Gitters

Dimension des Raumes W_l auf $]0, 1[^d$:

$$|W_l| = \prod_j 2^{l_j - 1} = 2^{|l|_1 - 1}$$

Beitrag der Basisfunktionen aus W_l :

$$\|u_l\|_\infty \leq 2^{-d} \cdot 2^{-2|l|_1} \cdot |u|_\infty$$

mit der Norm:

$$|u|_\infty := \left\| \frac{\delta^{2d} u}{\prod_j \delta x_j^2} \right\|_\infty$$

Dünne Gitter

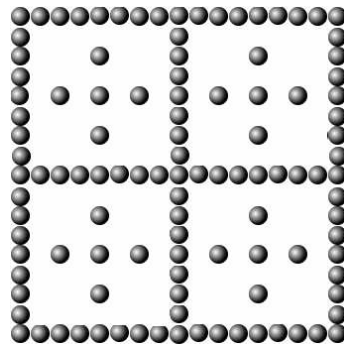
Die Anzahl der benötigten Basisfunktionen steigt, während der zu erwartende Beitrag mit der eins-Norm von l sinkt.

Das legt folgende Definition des dünnen Gitters nahe:

$$V_n^{(1)} := \bigoplus_{|l|_1 \leq n+d-1} W_l$$

Interpolation auf dünnem Gitter

n	Nodes	Fehler
0	4	6.96
1	9	5.56
2	21	2.38
3	49	0.75
4	113	0.37
5	257	0.12
6	577	0.040
7	1281	0.013



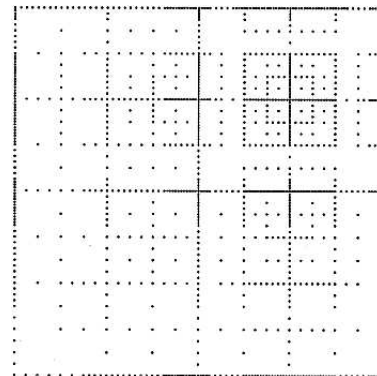
Komplexitätsvergleich

$$\begin{array}{ll}
 V_n^{(\infty)} : & \epsilon = h \\
 & N = h^{-d} \\
 & N_{(\epsilon)} = \epsilon^{-d} \\
 \\
 V_n^{(1)} : & \epsilon = h \\
 & N = h^{-1} \cdot |\log h|^{d-1} \\
 & N_{(\epsilon)} = \epsilon^{-1} \cdot |\log \epsilon|^{d-1}
 \end{array}$$

Adaptives Gitter

Beim dünnen Gitter werden nur Basisfunktionen berücksichtigt, deren Beitrag einen bestimmten Schwellenwert überschreiten.

Gitter	Punkte	Fehler
adaptiv	1066	5.39e-03
dünn	2817	4.03e-03
voll	16641	3.05e-03



Diskretisierung des Laplaceoperators

Für den Laplace-Operator ergeben sich in der Stiffness-Matrix folgende Einträge

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, d\omega$$

Für das Produkt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j &= \sum_{k=1}^d \frac{\delta \phi_i}{\delta x_k} \cdot \frac{\delta \phi_j}{\delta x_k} \\ &= \sum_{k=1}^d \left(\delta_{x_k} \prod_{l=1}^d \phi_{I_l}(x_l) \right) \cdot \left(\delta_{x_k} \prod_{l=1}^d \phi_{J_l}(x_l) \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \left(\delta_{x_k} \phi_{I_k}(x_k) \cdot \delta_{x_k} \phi_{J_k}(x_k) \cdot \prod_{l \neq k} (\phi_{I_l}(x_l) \cdot \phi_{J_l}(x_l)) \right) \end{aligned}$$

Das mehrdimensionale Integral läßt sich als Summe und Produkt von eindimensionalen Integralen darstellen.

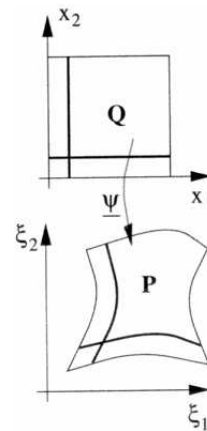
$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \\ &= \int \sum_{k=1}^d \left(\delta_{x_k} \phi_{I_k}(x_k) \cdot \delta_{x_k} \phi_{J_k}(x_k) \cdot \prod_{l \neq k} (\phi_{I_l}(x_l) \cdot \phi_{J_l}(x_l)) \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^d \int \left(\delta_{x_k} \phi_{I_k}(x_k) \cdot \delta_{x_k} \phi_{J_k}(x_k) \cdot \prod_{l \neq k} (\phi_{I_l}(x_l) \cdot \phi_{J_l}(x_l)) \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^d \left(\left(\int \delta_{x_k} \phi_{I_k}(x_k) \cdot \delta_{x_k} \phi_{J_k}(x_k) \, dx_k \right) \cdot \left(\prod_{l \neq k} \int \phi_{I_l}(x_l) \cdot \phi_{J_l}(x_l) \, dx_l \right) \right) \end{aligned}$$

Gebietstransformation

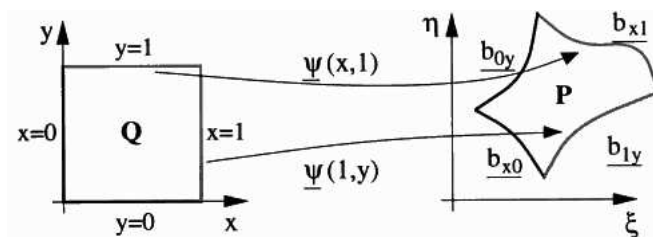
Dünne Gitter wurden bisher nur für das Einheitsquadrat Q definiert. Sei ψ eine diffeomorphe Abbildung von Q auf das krumme Gebiet P . Dann kann mit folgender Anpassung die Differentialgleichung auf Q zurückgeführt werden.

$$\int_P g(\xi) d\xi = \int_{\psi^{-1}(P)} g(\psi(x)) |det J_\psi(x)| dx$$

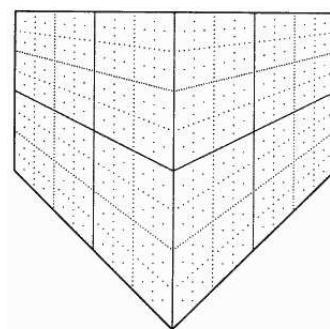
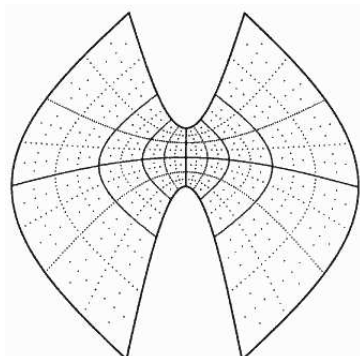
J = Jakobimatrix



Transfinite Interpolation



$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & ((1 - y) \cdot b_{x0}(x) + y \cdot b_{x1}(x)) + \\ & ((1 - x) \cdot b_{0y}(y) + x \cdot b_{1y}(y)) - \\ & ((1 - y)(1 - x) \cdot b_{0y}(0) + (1 - y)x \cdot b_{1y}(0) + \\ & + y(1 - x) \cdot b_{0y}(1) + yx \cdot b_{1y}(1)) \end{aligned}$$



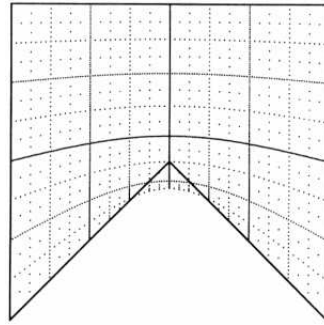
AH-Gitter

Bei der elliptischen Gittererzeugung löst man eine elliptische Differentialgleichung für die Abbildung ψ . Für das AH (nach Amsden und Hirt) wird die Laplace-Gleichung gelöst.

$$\Delta\psi = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = 0$$

Für die beiden Komponenten ψ_1 und ψ_2 heißt das:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\psi_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi_1}{\delta y^2} &= 0 \\ \frac{\delta^2\psi_2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi_2}{\delta y^2} &= 0\end{aligned}$$



TTM-Gitter

Für das TTM-Gitter (nach Thompson, Thames und Mastin) mit

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

muß folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned}(\xi_y^2 + \eta_y^2)\xi_{xx} - 2(\xi_x\xi_y + \eta_x\eta_y)\xi_{xy} + (\xi_x^2 + \eta_x^2)\xi_{yy} &= 0 \\ (\xi_y^2 + \eta_y^2)\eta_{xx} - 2(\xi_x\xi_y + \eta_x\eta_y)\eta_{xy} + (\xi_x^2 + \eta_x^2)\eta_{yy} &= 0\end{aligned}$$

Nachteil: Hoher Berechnungsaufwand

Vorteil: liefert immer einen Diffeomorphismus

