Um bei der Summendarstellung einer Zahl n die maximale Anzahl A(n) an verschiedenen Summanden zu erhalten, wähle man diese jeweils möglichst klein. Die kleinsten Summanden befinden sich in der Summe von 1 bis A(n), deshalb ist die Summe kleinergleich der Zahl n. Summiert man bis zur nächst höheren Zahl A(n)+1, so ist die Summe größer als n, denn sonst könnte man n mit A(n)+1 Summanden darstellen.

$$\sum_{i=1}^{A(n)} i \leq n < \sum_{i=1}^{A(n)+1} i$$

Für diese Summen gilt die Formel für die arithmetische Reihe:

$\frac{1}{2}A(n) + \frac{1}{2}A(n)^2 \leq n \quad \Leftrightarrow$

$A(n) \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2n}$

Das für A(n) Berechnete kann als Substitution für A(n)+1 angesehen werden:

$A(n)+1 > -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2n} \quad \Leftrightarrow$

$A(n) \quad > -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2n}$

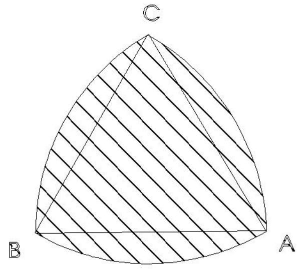
Im Intervall

$\left]-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2n}\ ;\ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2n}\right]$

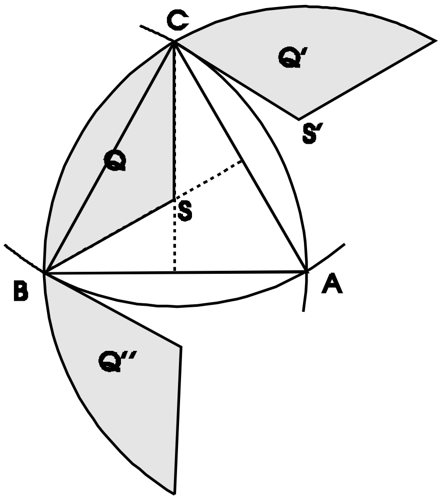
ist genau eine ganze Zahl, da die Differenz der Grenzen eins ergibt und eine Grenze ausgeschlossen wurde. Das heißt A(n) ist die größte ganze Zahl, die kleiner als die obere Grenze ist.

$$A(n) = \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2n}\right]$$

In jeder Punktemenge M muß es ein größtes Dreieck geben, seine Eckpunkte seien mit A, B und C bezeichnet. Es darf also keinen Punkt geben, der von einem dieser Punkte weiter als die Seitenlänge des größten Dreiecks entfernt ist. Er kann folglich nur im unten schraffierten Bereich (Begrenzungslinien eingeschlossen) liegen. Dieser Bereich entsteht, wenn man um jeden Punkt einen Kreis durch die übrigen zieht.



Liegt ein weiterer Punkt P (P∉{A,B,C}) im Inneren dieses Bereiches, entsteht durch Bildung eines neuen Dreiecks ein Punkt außerhalb des Schraffierten, wie folgende Skizze deutlich macht.:



Es soll nun der Punkt A so bezeichnet werden, daß der Abstand AP größergleich dem Abstand BP und dem Abstand CP ist, d.h. der Punkt liegt auf der mit Q gekennzeichneten Fläche. Sie ist begrenzt durch die Mittelsenkrechten auf den Strecken [AB] und [AC] und dem Kreis um A durch B und C.
Der Punkt P' bildet mit A und P ein gleichseitiges Dreieck, d.h. der Winkel PAP' ist 60°. Also liegt P' im Bereich Q' (bzw. Q''), der durch 60°-Drehung der Fläche Q um A entstanden ist. (Für P'∈Q'' geht die Beweisführung analog weiter, allerdings mit vertauschten Punkten B und C).
Die Begrenzungslinie CS' ist Tangente an dem Kreis um B durch C, weil der Winkel BCS' 90° beträgt.: Er setzt sich zusammen aus den Winkeln BCA=60° und ACS' =30°, welcher durch Drehung aus dem Winkel ABS entsteht und 30° ist, da die Seitenhalbierende hier auch Winkelhalbierende ist.
Daraus folgt, daß Q' mit dem oben schraffierten Bereich nur den Punkt C gemeinsam hat, der aber kein Dreieck mit P und A bilden konnte, weil P≠B.

=> Die Menge M kann nicht mehr als drei Punkte haben.

Aufgabe 3:

Es wird gezeigt, daß man mit folgender Formel unendlich viele Quadratzahlen c_n^2 mit den gewünschten Eigenschaften darstellen kann.

$$c_n2 = (10^n a_n)^2 + b_n^2$$

a_n^2 und b_n^2 sind Quadratzahlen mit je 2n Stellen. Hintereinander geschrieben ergeben sie die Quadratzahl c_n^2.

ges: $a_n, b_n, c_n \in N$ für alle $n \in N$

1) Folgende a_n, b_n genügen der obigen Bedingung.

$a_n := 10^n/2 - 1$
$b_n := 10^n - 1$

$c_n2 = (10^n (10^n/2 - 1))^2 + (10^n - 1)^2$
$c_n2 = \frac{1}{4} 10^{4n} - 10^{3n} + 10^{2n} + (10^n - 1)^2$
$c_n2 = (\frac{1}{2} 10^{2n} - (10^n - 1))^2$
$c_n = \frac{1}{2} 10^{2n} - 10^n + 1$

Daraus folgt, daß c_n ganzzahlig ist, da alle Summanden ganzzahlig sind.

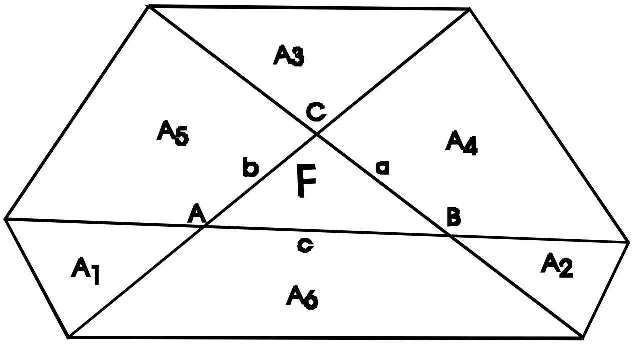
2) Es muß noch gezeigt werden, daß a_n^2 und b_n^2 genau 2n Stellen haben, was beinhaltet, daß die erste Ziffer ungleich 0 ist.

=> Es muß gelten: $10^{2n} > a_n^2, b_n^2 \geq 10^{2n-1}$

$n \geq 1$ für $n \in N$ <=>
$2n \geq n+1$ <=>
$10^{2n} \geq 10^{n+1}$ =>
$1.5 * 10^{2n} + 10 \geq 10^{n+1}$ <=>
$2.5 * 10^{2n} - 10^{n+1} + 10 \geq 10^{2n}$ <=>
$(10^n/2 - 1)^2 \geq 10^{2n-1}$ <=>
$a_n^2 \geq 10^{2n-1}$

Aus der Definition folgt: $a_n^2 < b_n^2 < 10^{2n}$.

=> $10^{2n} > b_n^2 > a_n^2 \geq 10^{2n-1}$ 0



$F = {}^{1}/_{2}\ bc\ \sin\alpha$

$A1 = {}^{1}/_{2}\ a^{2}\ \sin\alpha$; $A2 = {}^{1}/_{2}\ b^{2}\ \sin\ $; $A3 = {}^{1}/_{2}\ c^{2}\ \sin\gamma$

$A4 = {}^{1}/_{2}\ (b+c)^{2} \sin\alpha - F$; $A5 = {}^{1}/_{2}\ (a+c)^{2} \sin\ \ - F$; $A6 = {}^{1}/_{2}\ (a+b)^{2} \sin\gamma - F$

$A = A1+A2+A3+A4+A5+A6+F$

$A1+A4 = {}^{1}/_{2}\ (a^{2} + b^{2} + c^{2}) \sin\alpha + bc \sin\alpha - F$

$A2+A5 = {}^{1}/_{2}\ (a^{2} + b^{2} + c^{2}) \sin\ \ + ac \sin\ \ - F$

$A3+A6 = {}^{1}/_{2}\ (a^{2} + b^{2} + c^{2}) \sin\gamma + ab \sin\gamma - F$

$A = {}^{1}/_{2}\ (a^{2} + b^{2} + c^{2})\ (\sin\alpha + \sin\ \ + \sin\gamma) + 4F$

$A = {}^{1}/_{2}\ (a^{2} + b^{2} + c^{2})\ ({}^{b}/_{a} + {}^{c}/_{a} + 1)\ \sin\alpha\ + 4F$

Das Verhältnis zwischen A und F heißt V.

$V = {}^{A}/_{F} = (a^{2} + b^{2} + c^{2})(a + b + c)/_{abc} + 4$

$V = a^{2}/_{bc} + {}^{a}/_{c} + {}^{a}/_{b} + {}^{b}/_{c} + b^{2}/_{ac} + {}^{b}/_{a} + {}^{c}/_{b} + {}^{c}/_{a} + c^{2}/_{ab} + 4$

$V = (a^{3} + b^{3} + c^{3})/_{abc} + ({}^{a}/_{b} + {}^{b}/_{a}) + ({}^{a}/_{c} + {}^{c}/_{a}) + ({}^{b}/_{c} + {}^{c}/_{b}) + 4$

Wert plus Kehrwert ist minimal 2, weil:

$f\ (x) = x + {}^{1}/_{x}$ $D = R^{+}$

$f'(x) = 1 - {}^{1}/_{x^2} = 0;\ x = 1$

$f''(x) = {}^{1}/_{x^3} > 0$

=> Tiefpunkt (1/2)

$V \geq 10 + (a^{3} + b^{3} + c^{3})/_{abc}$

Es ist $V \geq 13$, wenn

$(a^{3} + b^{3} + c^{3})/_{abc} \geq 3$ <=>

$a^{3} + b^{3} + c^{3} - 3abc \geq 0$

linke Seite nach c abgeleitet: $3c^{2} - 3ab$

2. Ableitung: $6c$ ist immer größer 0

=> Minimum für $c = \sqrt{ab}$

$a^{3} + b^{3} + \sqrt{ab}^{3} - 3\sqrt{ab}^{3} \geq 0$ <=>

$(\sqrt{a}^{3} - \sqrt{b}^{3})^{2} \geq 0$

q.e.d.